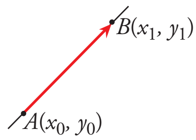
3. Un enfoque distinto: la ecuación de la recta con vectores

Soluciones

Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad

Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_0 + m(x - x_0)$

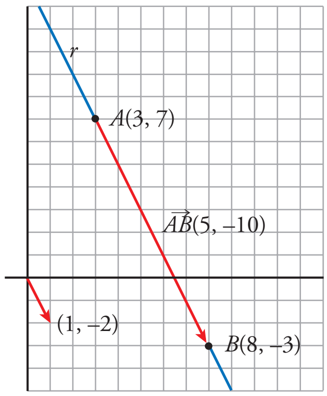


El vector $\overrightarrow{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $\overrightarrow{AB}(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$.

La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3-7}{8-3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$, es decir, $y = -2x + 13$



Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\overrightarrow{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ahora te mostramos tres ejemplos:

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(6, 7)$.

Un vector dirección es $\overrightarrow{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{2}$ Ecuación: $y = 3 + \dfrac{1}{2}(x + 2) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 4$

3. Un enfoque distinto: la ecuación de la recta con vectores
Soluciones

EJEMPLO 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por (5, –3) y tiene por vector dirección $\vec{d}(3, 2)$.

Su pendiente es: $m = \frac{2}{3}$ Su ecuación es: $y = -3 + \frac{2}{3}(x - 5)$

EJEMPLO 3

Hallar las rectas paralelas a $r: 2x + 5y - 4 = 0$ que pasan por (0, 0) y (4, –3).

Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Recordemos que la pendiente de una recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y:

$2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\frac{2}{5}$

s_1: pasa por (0, 0) y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x$

s_2: pasa por (4, –3) y su pendiente es $-\frac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \frac{2}{5}(x - 4)$

ACTIVIDADES

1 Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$

b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

$\boxed{y = \frac{-8}{7}x + \frac{50}{7}}$

2 Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, –5) y tiene por vector dirección (7, –4).

$\boxed{y = -\frac{4}{7}x - 1}$

3 Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por (0, –3).

$\boxed{y = -3 + \frac{5}{6}x}$

4 Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por (2, 4).

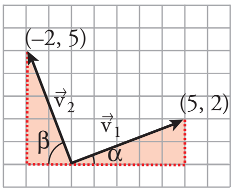
$\boxed{y = 4}$

3. Un enfoque distinto: la ecuación de la recta con vectores

Soluciones

Vector perpendicular a otro

Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$.



En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \frac{b}{a}$ y $m_2 = \frac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Por ejemplo:

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \frac{3}{5}$.

Su ecuación es $y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$

3. Un enfoque distinto: la ecuación de la recta con vectores

Soluciones

EJEMPLO 2

Obtener varios vectores perpendiculares a $\vec{v}(2, 3)$.

(–3, 2) es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son (3, –2), (–6, 4), (6, –4)...

EJEMPLO 3

Dar la ecuación de la recta r, *perpendicular a* s: $5x - 3y + 15 = 0$, *que pasa por* (–7, 2).

Pendiente de s: $y = \frac{5}{3}x + \frac{15}{3} \rightarrow m_1 = \frac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \frac{3}{5}(x + 7) \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

ACTIVIDADES

5 Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).

(1, 6), (2, 12) y (3, 18)

6 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

$y = -\frac{5}{7}x - \frac{25}{7}$

7 La recta r pasa por (3, 0) y la recta s, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$. Halla sus ecuaciones.

Ecuación de r: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Ecuación de s: $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$